

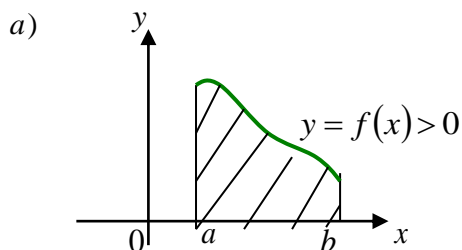
Тема 13. Геометрические приложения определенного интеграла.

§1. Площадь плоской фигуры.

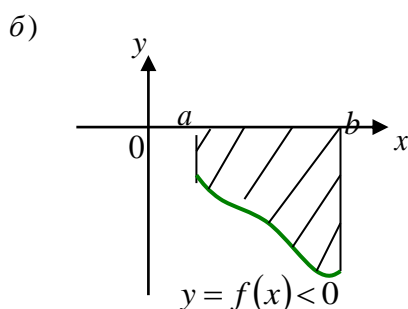
Пусть функция $y = f(x)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда по геометрическому смыслу определенного интеграла (§1) площадь фигуры, заключенной между графиком функции $y = f(x)$, осью OX и двумя

прямыми $x = a$ и $x = b$, численно равна определенному интегралу $\int_a^b f(x) dx$.

Причем, если $f(x) \geq 0$ (рис. а), то



$$(1) \quad \boxed{S} = \int_a^b f(x) dx = \boxed{\int_a^b y dx} \quad (f(x) \geq 0)$$



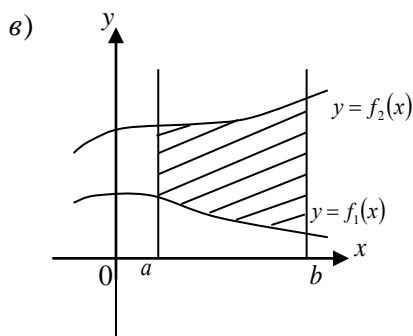
$$(2) \quad \boxed{S} = -\int_a^b f(x) dx = \boxed{-\int_a^b y dx = \int_a^b y dx} \quad (f(x) < 0)$$

В случае, если $f(x) < 0$ (рис. б), то в формуле (1) имеет место знак «-».

В общем случае абсолютная величина выражает искомую площадь, т.е.

$$\boxed{S = \left| \int_a^b y dx \right|}$$

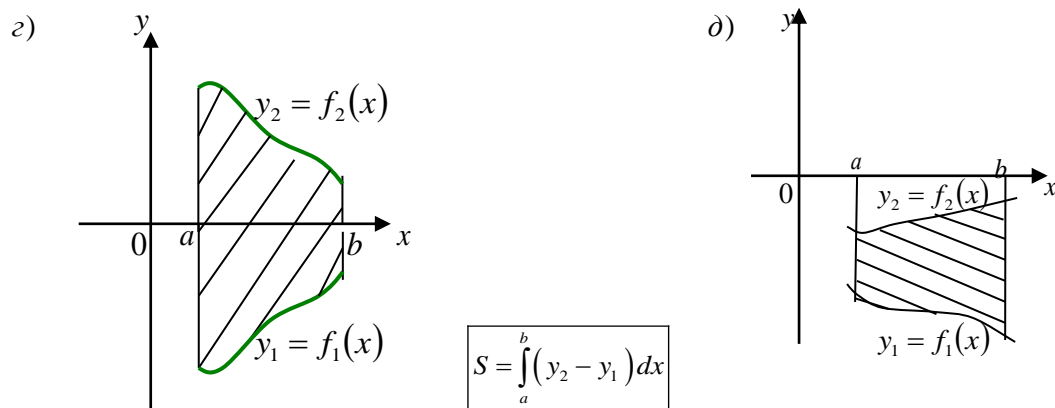
Если фигура ограничена сверху и снизу неотрицательными функциями $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ соответственно, непрерывными на отрезке $[a; b]$ (рис. в), то площадь криволинейной фигуры равна разности площадей криволинейных трапеций, ограниченных сверху графиками функций $f_2(x)$ и $f_1(x)$ (при $f_2(x) > f_1(x)$):



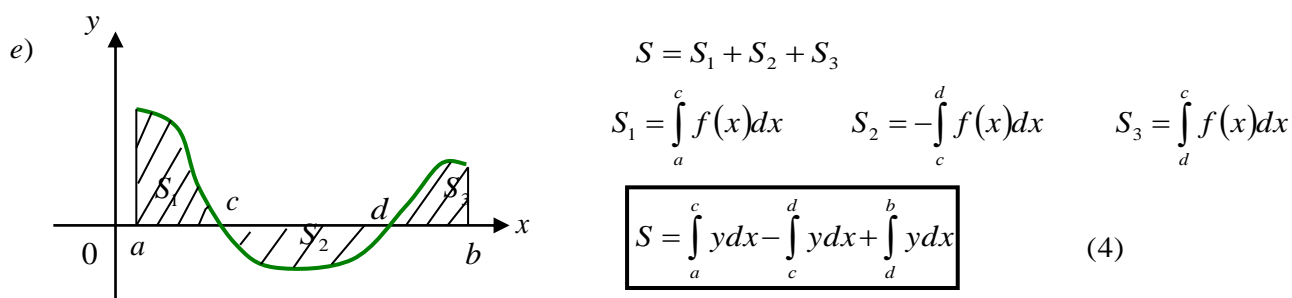
$$S = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx = \int_a^b (y_2 - y_1) dx$$

$$\boxed{S = \int_a^b (y_2 - y_1) dx} \quad (3)$$

Формула (3) справедлива при любом расположении кривых $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ (рис. г, д), при условии, что $f_2(x) > f_1(x)$:

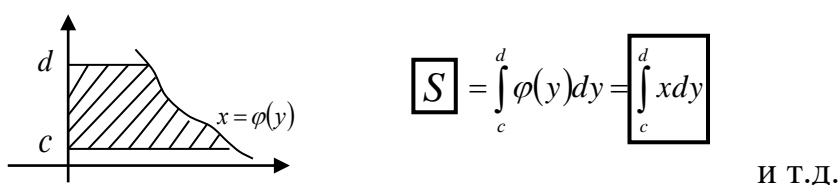


Если график функции $y = f(x)$ на интервале $[a; b]$ несколько раз пересекает ось OX (рис. е), то необходимо вычислить площади фигур, расположенных выше и ниже оси OX и сложить их.



Аналогично можно рассмотреть шесть случаев вычисления площади криволинейной трапеции, прилежащей к оси OY .

Например:



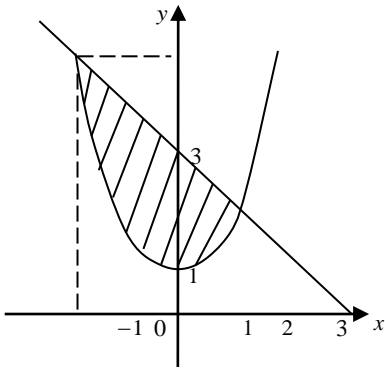
Пример 1: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$ и $x + y = 3$.

Решение: 1) Построим линии и обозначим криволинейную трапецию:

$y = x^2 + 1$ - парабола, смещенная по оси OY на единицу вверх. Найдем координаты вершины:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 0 ; y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 1 \quad \frac{x}{y} \left| \begin{array}{c|c} 0 & \pm 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right| \frac{\pm 2}{5}$$

$$y = -x + 3 - \text{прямая} \quad \frac{x}{y} \left| \begin{array}{c|c} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{array} \right| \frac{3}{0}.$$



2) Найдем точки пересечения линий (левую и правую границу криволинейной трапеции):

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = -x + 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 1 = -x + 3 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} y_1 = 2 \\ y_2 = 5 \end{matrix} \quad \begin{matrix} A(1; 2) \\ B(-2; 5) \end{matrix}$$

3) Вычислим площадь: $S = \int_a^b (y_2 - y_1) dx$, где

$$y_2 = -x + 3 ; y_1 = x^2 + 1 ; a = -2 ; b = 1$$

$$S = \int_{-2}^1 ((-x + 3) - (x^2 + 1)) dx = \int_{-2}^1 (-x + 3 - x^2 - 1) dx = \int_{-2}^1 (-x - x^2 + 2) dx =$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-2}^1 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 2 \right) - \left(-\frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3} + 2(-2) \right) =$$

$$= \frac{7}{6} - \left(-2 + \frac{8}{3} - 4 \right) = \frac{7}{6} + 6 - \frac{8}{3} = \frac{7 + 36 - 16}{6} = \frac{27}{6} = 4\frac{1}{2} \text{ (кв.ед.)}$$

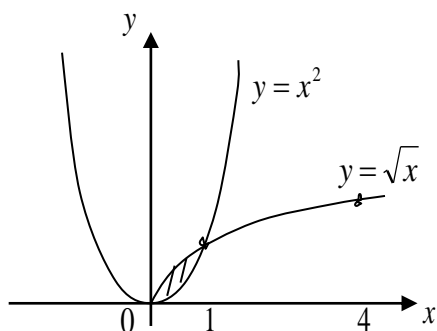
Пример 2: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$.

Решение:

1). Построим линии:

$$- y = \sqrt{x} - \text{полупарабола} \quad \frac{x}{y} \left| \begin{array}{c|c} 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{array} \right| \frac{4}{1}$$

- $y = x^2$ - парабола $\frac{x}{y} \left| \frac{0}{0} \right| \frac{\pm 1}{1} \left| \frac{\pm 2}{4} \right|$



2). Найдем точки пересечения линий:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x^2 \end{cases} \quad \sqrt{x} = x^2 \quad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$$

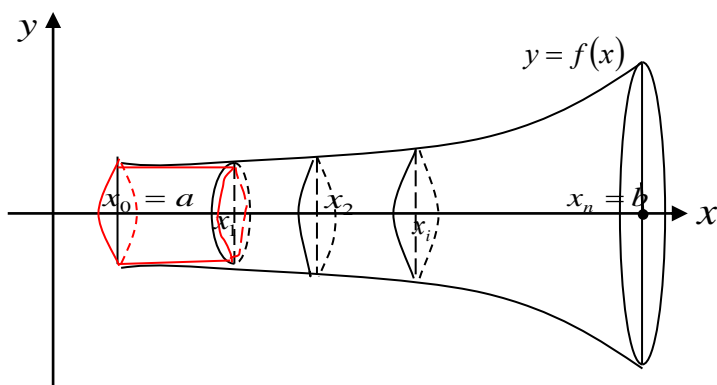
3). Вычислим площадь:

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ (кв.ед.)}$$

§2. Объем тела вращения.

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана непрерывная знакопостоянная функция $y = f(x)$. Найдем объем тела, образованного при вращении вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y = f(x)$; $y = 0$; $x = a$; $x = b$.

Пусть известна площадь любого сечения этого тела (вращения) плоскостями, перпендикулярными оси OX . Разобьем тело на слои, перпендикулярные OX и проходящие через точки $x_1; x_2 \dots x_{n-1}$.



Заменим каждый слой прямым цилиндром с высотой $(x_i - x_{i-1})$ и площадью основания $S(x_i)$. Тогда объем каждого элементарного цилиндра будет равен $V_i = S(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = S(x_i) \cdot \Delta x_i$.

Объем каждого элементарного слоя будет приближенно равен объему соответствующего цилиндра, но отбрасываемая величина бесконечно малая более высокого порядка малости. Тогда объем всего тела будет равен сумме

объемов всех слоев: $V = \sum_{i=1}^n v_i \approx \sum_{i=1}^n S(x_i) \cdot \Delta x_i$ и тем точнее будет вычислен

объем, чем больше число точек разбиения « x_i », т.е. чем больше « n ». Переходя к пределу, получим точное равенство:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n S(x_i) \cdot \Delta x_i, \text{ а предел такой суммы и является определенным}$$

интегралом, т.е. $V = \int_a^b S(x) dx$ (1).

Зная, что $S(x)$ - площадь основания цилиндра и равна $S(x) = \pi r^2$, а радиус $r = y$, имеем $S(x) = \pi y^2$. Тогда формула (1) примет вид:

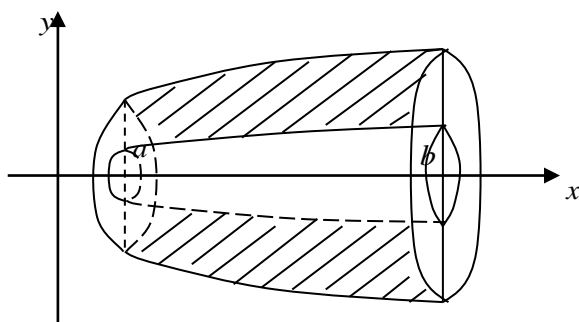
$$V_{m.e.} = \int_a^b \pi y^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx - \text{вокруг оси } OX.$$

Аналогично можно вращать трапецию вокруг оси OY , если функция задана как $x = \varphi(y)$. Тогда:

$$V_{m.в.} = \pi \int_c^d x^2 dy \text{ - вокруг оси } OY.$$

Замечание. Если на отрезке $[a; b]$ криволинейная трапеция опирается не на ось OX , а ограничена двумя функциями $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, причем $f_2(x) \geq f_1(x)$, то имеем:

$$V_{m.в.} = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx.$$



Пример 1:

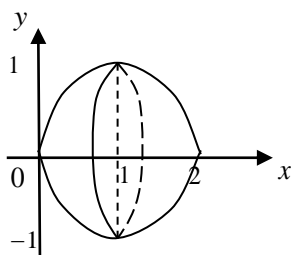
Вычислить объем тела, образованного при вращении вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: $y = 2x - x^2$ и $y = 0$. Определить, какова масса продукта, заполняющего этот объем, если 1 м^3 весит 0,4 тонны?

Решение.

1). Построим линии:

- $y = 2x - x^2$ - парабола

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-2} = 1; \quad y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{4 - 0}{-4} = 1; \quad \frac{x}{y} \left| \frac{1}{1} \right| \frac{0}{0} \left| \frac{2}{0} \right|$$



2). Найдем объем тела вращения:

$$V_{m.в.} = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \pi \left(4 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 =$$
$$= \pi \left(\frac{4}{3} \cdot 2^3 - 2^4 + \frac{1}{5} \cdot 2^5 \right) = \pi \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} \right) = \pi \left(\frac{160 - 240 + 96}{15} \right) = \frac{16\pi}{15} (m^3)$$

3). $m = \frac{16\pi}{15} \cdot 0,4 \approx 1,34m.$

§3. Понятие несобственного интеграла.

При рассмотрении определенного интеграла $\int_a^b f(x) dx$ как предела интегральных сумм предполагалось, что:

1. Подынтегральная функция ограничена, т.е. отрезок интегрирования $[a; b]$ был конечным.
2. Подынтегральная функция была непрерывна и определена на отрезке $[a; b]$.

Такой определенный интеграл называется **собственным**.

Определение 1. Если одно или оба из этих условий нарушается, то интеграл

$$\int_a^b f(x) dx \text{ называется } \textbf{несобственным}.$$

Пример: 1) $\int_0^{\infty} x dx$ - нарушено 1-е условие;

2) $\int_0^3 \frac{dx}{x-2}$ - нарушено 2-е условие.

§4. Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция $y = f(x)$ определена в интервале $[a; +\infty)$ и интегрируется в любом конечном отрезке $[a; b]$ этого интервала, при условии, что $a < b$.

Определение 1. Если при $b \rightarrow \infty$ для $\int_a^b f(x) dx$ существует конечный предел, то такой интеграл называется несобственным интегралом с **бесконечным верхним пределом**.

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

Определение 2. Если $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ существует, то несобственный интеграл называется **сходящимся**. В противном случае интеграл называется **расходящимся** и ему не приписывают никакого числового значения.

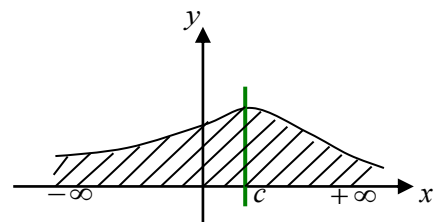
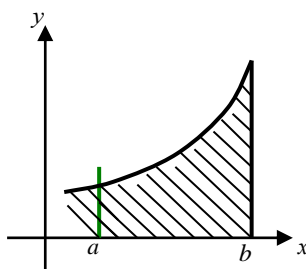
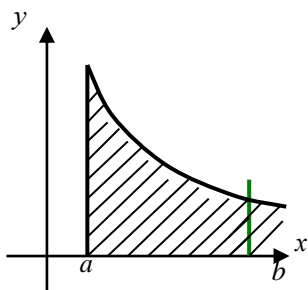
Аналогично можно рассмотреть интеграл:

$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$ - несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx ,$$

где c - фиксированное число (лучше принимать $c=0$)

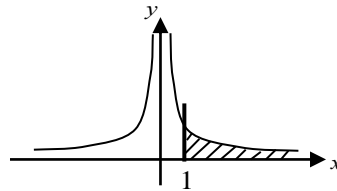
С геометрической точки зрения несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования представляет собой площадь криволинейной трапеции (если интеграл сходится).



Пример 1:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{1} \right) = -\frac{1}{\infty} + 1 = 0 + 1 = 1 \quad - \quad \text{предел}$$

конечный, интеграл сходится.



Пример 2:

$$\int_0^{\infty} x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2} \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (b^2 - 0) = \frac{1}{2} \cdot (\infty - 0) = \infty \quad - \quad \text{интеграл расходится.}$$

Пример 3:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctg x) \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctg x) \Big|_0^b = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctg 0 - \arctg a) + \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctg b - \arctg 0) = \arctg 0 - \arctg(-\infty) + \arctg(\infty) - \arctg 0 = \\ &= 2 \arctg \infty = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \quad - e \quad - \text{интеграл сходится.} \end{aligned}$$

§5. Несобственные интегралы от разрывных функций.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна при $x \in [a; b)$, т.е. $a \leq x < b$. Значит, $x = b$ - точка разрыва.

При этом предполагается, что на любом отрезке $[a; b - \varepsilon]$ функция $y = f(x)$ непрерывна и интегрируема.

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx} \quad (2)$$

Определение 1. Как бы ни было мало число $\varepsilon > 0$, если существует конечный предел (2), то его называют несобственным интегралом от

разрывной функции. Если предел конечный, то интеграл будет сходящимся, если бесконечный, то интеграл расходящийся.

Аналогично рассматриваются интегралы при условии, что $a < x \leq b$,

$x = a$ - точка разрыва, тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon+a}^b f(x) dx$$

Можно рассматривать интегралы от функции $y = f(x)$ при условии, что $x = c$ - точка разрыва, если $a < c < b$. Тогда:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx$$

Пример 1: Вычислить несобственный интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\arcsin \frac{x}{a} \Big|_0^{a-\varepsilon} \right) = a \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\arcsin \frac{a-\varepsilon}{a} - \arcsin 0 \right) = \\ &= a \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\arcsin \left(1 - \frac{\varepsilon}{a} \right) \right) = a \cdot \arcsin(1 - 0) = a \cdot \arcsin 1 = a \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{a\pi}{2} \end{aligned}$$

Предел конечный, интеграл сходящийся.

Пример 2:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x} \Big|_{-1}^{0-\varepsilon} \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x} \Big|_{0+\varepsilon}^1 \right) = \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{0-\varepsilon} + \frac{1}{1} \right) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{0+\varepsilon} \right) = -\left(\frac{1}{0} + 1 \right) - \left(1 - \frac{1}{0} \right) = -\infty + 1 - 1 + \infty = \infty \end{aligned}$$

Интеграл расходится.

Покажем, что было бы, если этот интеграл взять как обычный определенный интеграл.

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -1 - 1 = -2 \quad - !!!$$

Этот результат неверный, так как функция $f(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx > 0$.